

Curvas y Superficies Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Curvas y Superficies Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Curvas y Superficies.

Curso Académico 2022/23.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Pueden faltar algunos ejercicios del examen original.

Ejercicio 1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. y embebida donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Se llama cono sobre α a $S_\alpha = X(I \times \mathbb{R}^+)$ donde $X : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación dada por $X(u, v) = v\alpha(u)$.

- Demuestra que S_α es una superficie regular orientable y determina la primera forma fundamental de S en cualquier punto $p \in S_\alpha$.
- Explicita una aplicación de Gauss de S_α , y determina la segunda forma fundamental y el endomorfismo de Weingarten de S_α asociados a N . Prueba que S_α es llana y calcula la curvatura media para todo $p \in S_\alpha$.
- Calcula las curvaturas y direcciones principales para todo $p \in S_\alpha$.
- Prueba que la aplicación $\Phi : S_\alpha \rightarrow \{z = 0\}$ dada por $\Phi(X(u, v)) = v(\cos(u), \sin(u), 0)$ es una isometría local. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ otra curva p.p.a. y embebida. Demuestra que los conos S_α y S_β son superficies isométricas.

Ejercicio 2. Realice los siguientes apartados:

- Sea $X : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S tal que la primera forma fundamental viene dada por:

$$E(u, v) = u^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = v^2$$

Demuestra que $X(U)$ es isométrica a un abierto del plano.

- Sea $Y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R} \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S tal que la primera y segunda formas fundamentales vienen dadas por:

$$E(u, v) = c \sin(u)^2 + \cos(u)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = c \cos(u)^2$$

$$e(u, v) = \frac{1}{h(u, v)}, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = \frac{\cos(u)^2}{h(u, v)}$$

donde c es una constante positiva y $h :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva. Determina para qué constantes c y funciones h la superficie $Y(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ está contenido en alguna esfera.